Problema 2
Etapa 6
Clasa a VII-a

Problema 2. O mulțime A conține 970 numere naturale între 1 și 2024 inclusiv. Arătați că în mulțimea A există 2 numere a și b diferite astfel încât $a+b$ se divide cu 23.

Soluție: Fie $M = \{1, 2, \cdots, 2024\}$ si $R_i = \{23k+i|0 \leq k \leq 87\}$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, \cdots, 23\}$
Se observă că $R_i \cap R_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ și $|R_i| = 88$.
Presupunem prin reducere la absurd că nu există a și b diferite în A astfel încât $a+b$ se divide cu 23. Înseamnă că A conține un singur element din R_{23}.
Dacă A conține un element din R_k atunci nu poate conține elemente din R_{23-k}, ceea ce înseamnă că A poate avea maxim $1 + 11 \cdot 88 = 969$ elemente, contradicție.