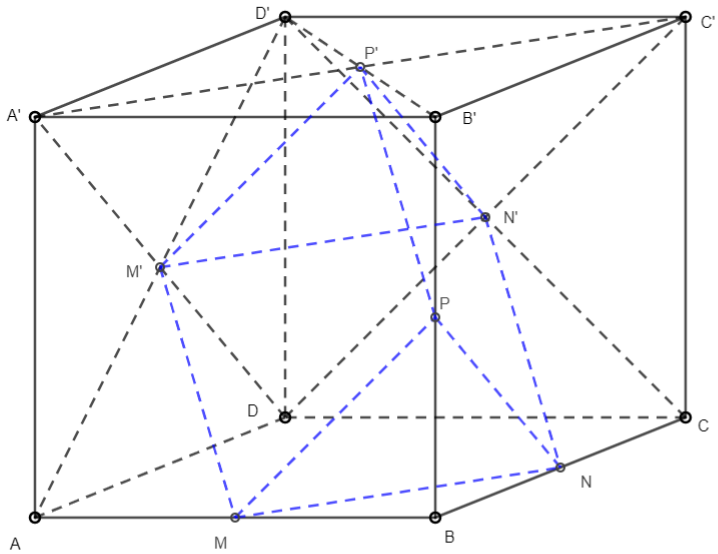
3. Prisma ABCDA’B’C’D’ este dreaptă. Notăm mijloacele muchiilor (AB), (BC) respectiv (BB’) cu M, N, P iar centrele fețelor ADD’A’, DCC’D’ respectiv A’B’C’D’ cu M’, N’ respectiv P’. Demonstrați că prisma triunghiulară MNPM’N’P’ este regulată dacă și numai dacă paralelipipedul ABCDA’B’C’D’ este cub. (*Petru Braica*)



Soluție.

Implicația directă. Știm că prisma ABCDA’B’C’D’ este dreaptă, prisma triunghiulară MNPM’N’P’ este regulată și vrem să arătăm că ABCDA’B’C’D’ este cub. Triunghiurile MBP și NBP sunt congruente în cazul IU deoarece unghiurile $\angle$ MBP și $\angle$ NBP sunt drepte, (PB) este o catetă comună iar ipotenuzele (MP) și (NP) sunt congruente ca laturi ale bazei MNP, triunghi echilateral, a prismei triunghiulare regulate MNPM’N’P’. Deci MB = BP, egalitate care înmulțită cu 2 dă AB = BB’, sau lungimea egală cu înălțimea prismei.(*) Comparăm acum triunghiurile NBM cu PBM. Unghiurile $\angle$ NBM și $\angle$ PBM sunt drepte, cateta (MB) este comună iar ipotenuzele (NM) și (PM) sunt congruente, deci din cazul IU rezultă congruența lor. De aici avem că NB = PB sau CB = BB' sau lățimea este egală cu înălțimea prismei patrulatere.(**). Din afirmațiile (*) și (**) deducem că prisma patrulateră ABCDA'B'C'D' este cub.

Implicația inversă. Știm că prisma ABCDA'B'C'D' este cub și vrem să demonstrăm că poliedrul MNPM'N'P' este o prismă triunghiulară regulată. Deoarece laturile bazei MNP a poliedrului MNPM'N'P', MN, MP, NP sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC, CBB' respectiv BB'A vom obține triunghiul MNP echilateral cu laturile egale cu jumătatea diagonalei feței cubului. Analog M'N', N'P', P'M' linii mijlocii în triunghiurile D'AC, D'CB' respectiv D'AB', de unde se obține că triunghiul M'N'P' este și el echilateral cu latura de lungime jumătate din diagonala feței laterale a cubului. Așadar bazele prismei triunghiulare sunt triunghiuri echilaterale congruente. Mai rămâne să demonstrăm că prisma este dreaptă. Vom arăta că muchia MM' este perpendiculară pe planele bazelor prismei triunghiulare. Astfel (MM') este linie mijlocie în triunghiul D'AB', prin urmare este paralelă și jumătate din diagonala BD' a cubului ABCDA'B'C'D'. Deoarece planele (MNP), și (M'N'P') sunt paralele cu planul (AB'C), tot din linii mijlocii, iar diagonala cubului, BD' este perpendiculară pe planul (AB'C) deoarece B și D' sunt vârfurile piramidelor regulate cu baza comună triunghiul echilateral AB'C, deducem că MM' este perpendiculară pe bazele prismei triunghiulare MNPM'N'P'. Analog se arată că și NN' repectiv PP' sunt perpendiculare pe bazele prismei triunghiulare. În concluzie fețele laterale ale prismei triunghiulare sunt dreptunghiuri, bazele sunt triunghiuri echilaterale, adică poliedrul MNPM'N'P' este prismă triunghiulară regulată regulată.