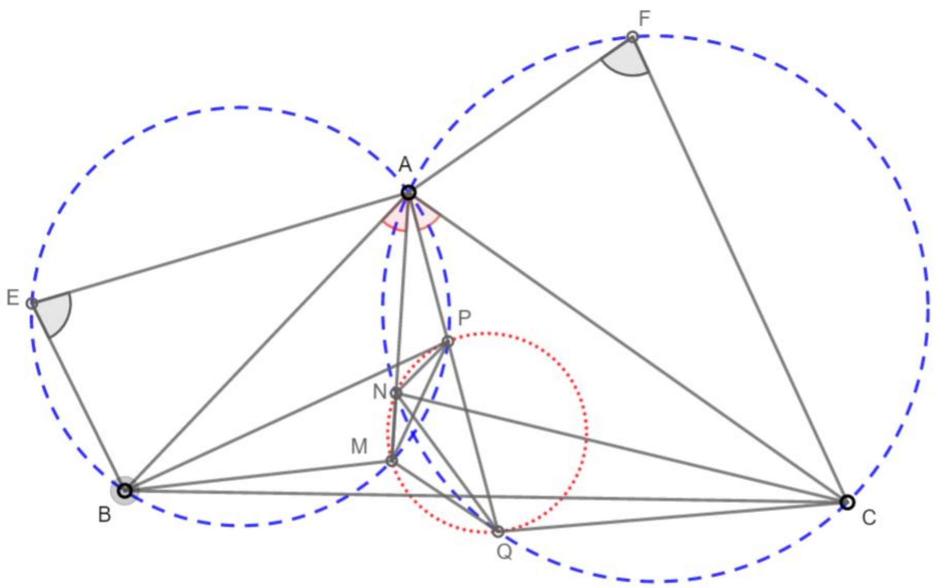
4. Se consideră triunghiul ABC cu AB < AC și în care (AX, (AY, două semidrepte interioare unghiului BAC, izogonale (adică are loc: ∠ BAX ≡ ∠ CAY). Considerăm punctele E și F exterioare triunghiului din care laturile (AB) respectiv (AC) se văd sub același unghi, în semiplane diferite determinate de dreapta AB. Cercul circumscris triunghiului ABE taie semidreptele (AX respectiv (AY după punctele M și P, respectiv cercul circumscris triunghiului AFC taie semidreptele (AX, respectiv (AY, după punctele N și Q.

Demonstrați că:

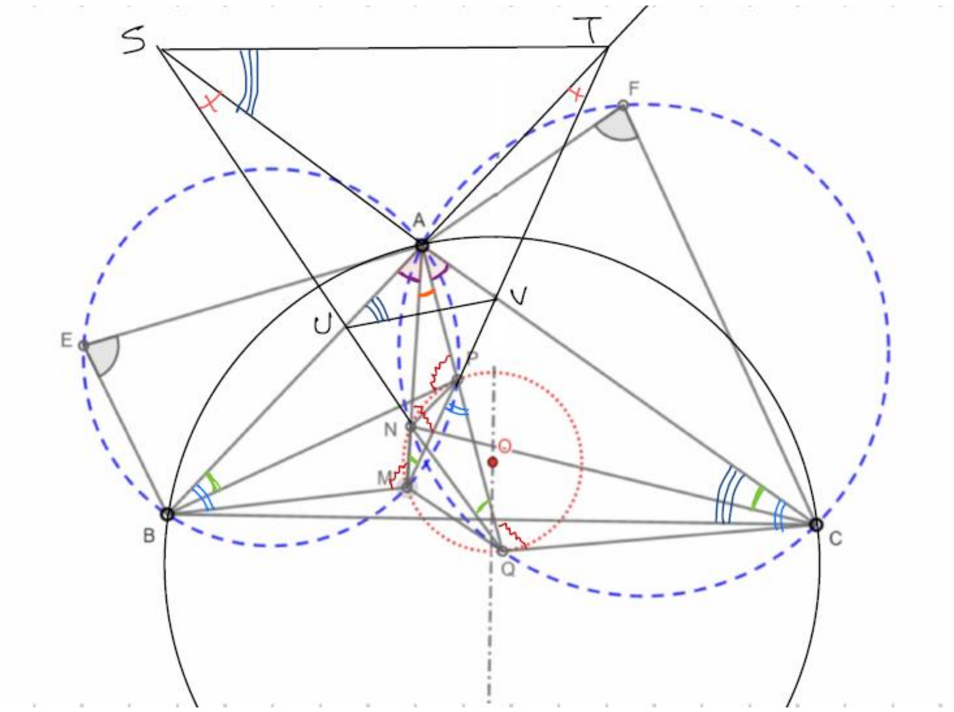
a) Punctele M, N, P și Q sunt conciclice;
b) Centrul cercului circumscris patrulaterului cu vârfurile M, N, P și Q aparține mediatoarei segmentului (BC).

(Petru Braica)

Soluție.



a). Patrulaterul APMB este inscriptibil de unde unghiurile ∠AMP cu ∠ABP sunt congruente întrucât subântind coarda (AP). Măsura acestor unghiuri este 180^0 – m (∠ BAP) – m (∠ BPA). Pe de altă parte măsura unghiului ∠NQA este egală cu măsura unghiului ∠NCA care la rândul lui are măsura egală cu 180^0 –m(∠NAC) - m (∠ANC). Deoarece unghiul ∠ANC este suplementul unghiului ∠AFC iar unghiul ∠AMB este suplementul unghiului ∠AEB deducem din ipoteza problemei cum că ∠AEB congruent cu ∠AFC, că avem congruența unghiurilor ∠ANC și a unghiului ∠AMB. De asemenea din izogonalitatea semidreptelor (AM, și (AQ, deducem prin diferență de unghiuri congruente că și unghiurile ∠CAN și ∠BAP sunt congruente. În final avem că unghiurile ∠NMP și ∠NQP sunt congruente afirmație echivalentă cu inscriptibilitatea patrulaterului MNPQ. Această justificare este pentru ordinea punctelor M, N, P, Q ca și în desen. Pentru altă ordine are loc o demonstrație asemănătoare a conciclicității punctelor.



b) Vom prezenta soluția dată de *Andrei Cațaron*.

Fie V intersecția dreptelor MP cu AC, și U intersecția dreptelor NQ cu AB. Triunghiurile AMB cu AQC sunt asemenea din cazul UU comform punctului a), deci ∠ABM ≡ ∠ ACQ. (1) Întrucât patrulaterul ABMP este inscriptibil avem că ∠ ABM ≡ ∠ MPQ (2). Din relațiile (1) și (2) deducem că ∠ ACQ ≡ ∠ MPQ prin urmare patrulaterul este PQCV inscriptibil. Analog patrulaterul BMNU inscriptibil. Din puterea punctului A față de cercul circumscris triunghiului PQC avem AV · AC = AP · AQ, din puterea punctului A față de cercul circumscris patrulaterului NMQP, deducem că AP · AQ = AN · AM, iar din puterea punctului A față de cercul circumscris triunghiului BMN avem că AM · AN = AU · AB. Folosind tranzitivitatea relației de egalitate obținem că AV · AC = AU · AB echivalent cu asemănarea triunghiurilor AUV și ACB de unde UVCB inscriptibil. (3) Fie S intersecția dreptelor AC cu NQ iar T intersecția lui AB cu MP. Din asemănarea triunghiurilor SQC cu TMB, cazul UU, deducem că $\angle$ QSC $\equiv$ $\angle$ MTB, deci patrulaterul SUVT este inscriptibil (4). Avem imediat din relațiile (3) și (4) congruențele unghiurilor $\angle$ TSV $\equiv$ $\angle$ ACB $\equiv$ $\angle$ TUV, deci dreapta ST este paralelă cu BC, sau antiparalela ST la antiparalela UV a dreptei BC este paralelă cu dreapta BC. Considerăm cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, AMB, PNM. Dreapta AB este *axa radicală* a primelor două, iar dreapta MP este *axa radicală* a ultimelor două, deci punctul T este *centrul radical* al celor trei cercuri sau T aparține *axei radicale* a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și MNP. Analog punctul S se află pe aceeași *axă radicală*, deci dreapta ST este *axa radicală* a celor două cercuri, circumscris triunghiului ABC și MNP. Dacă O' este centrul cercului circumscris triunghiului ABC avem OO' $\perp$ ST, dar ST paralelă cu BC, de unde OO' este perpendiculară pe dreapta BC de unde are loc concluzia punctului b).