**Problema 4.** Există numere naturale $n$ şi $m$ pentru care

$$7n^9 - 9m^7 = 1431?$$

Justificaţi răspunsul dat.

* * *

*Soluţie.* Răspunsul este NU.

Presupunem că există numere naturale $n$ şi $m$ pentru care relaţia este adevărată.

Deoarece $9m^7$ şi 1431 se divid cu 3 deducem că $3 \mid 7n^9$. Cum $3 \nmid 7$ rezultă $3 \mid n^9$, deci $n = 3k$, unde $k$ este număr natural.

Relaţia devine $7 \cdot 3^9 k^9 - 9m^7 = 1431$. Putem împărţi prin 9 şi avem $7 \cdot 3^7 k^9 - m^7 = 159$.

Deoarece $7 \cdot 3^7 k^9$ şi 159 se divid cu 3 deducem că $3 \mid m^7$, deci $m = 3p$, unde $p$ este număr natural.

Relaţia devine $7 \cdot 3^7 k^9 - 3^7 p^7 = 159$. Putem împărţi prin 3 şi obţinem $7 \cdot 3^6 k^9 - 3^6 p^7 = 53$.

Deoarece membrul stâng se divide cu 3, iar membrul drept nu se divide cu 3, ultima relaţie este imposibilă. Deci presupunerea făcută este falsă.