Problema 3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele M, N, P mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB. Notăm cu Q ortocentrul triunghiului MNP. Demonstraţi că $\sphericalangle BQC = 2\sphericalangle BAC$.

* * *

Soluţia 1. Fiind linie mijlocie în triunghiul ABC, $NP \parallel BC$. Cum $MQ \perp NP$, deducem că $MQ \perp BC$, deci dreapta MQ este mediatoarea segmentului $[BC]$. Astfel $QB = QC$. Analog $QA = QB$. Deducem că triunghiurile QAB, QBC, QCA sunt isoscele. Avem $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAQ + \sphericalangle CAQ$, $\sphericalangle BAQ + \sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABQ + \sphericalangle ACQ$. Cum $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBA - \sphericalangle CBQ$, $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BCQ$, obţinem relaţia

$$\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BAC - (180^\circ - \sphericalangle BQC).$$

Concluzia este imediată.

Soluţia 2. Ca mai sus $QA = QB = QC$. Rezultă că punctul Q este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, de unde $\sphericalangle BQC$ este unghiul la centru care subîntinde arcul mic $\overset{\frown}{BC}$, având astfel aceeaşi măsură cu acesta. Pe de altă parte, unghiul $\sphericalangle BAC$ este unghiul înscris în acelaşi cerc, având măsura egală cu jumătate din măsura arcului pe care îl subîntinde, arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. De aici rezultă concluzia.