Problema 4. Fie p prim, $p > 2$. Demonstraţi că $p^2 \mid \left(C_{np}^{kp} - C_n^k\right)$, pentru orice numere naturale n şi k, cu $k \leqslant n$.

* * *

Soluţie. Pentru $k \in \{0, n\}$, evident că $p^2 \mid 0$. Pentru $k = \overline{1, n-1}$, considerăm dezvoltarea:

$$(1+x)^{np} = \underbrace{(1+x)^p \cdot (1+x)^p \cdot \ldots \cdot (1+x)^p}_{n \text{ factori}} \tag{1}$$

Deoarece C_{np}^{kp} este coeficientul lui x^{kp} din $(1+x)^{kp}$, din (1) deducem:

$$C_{np}^{kp} = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=kp} C_p^{k_1} \cdot C_p^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_p^{k_n} \tag{2}$$

Cum $k_1, k_2, \ldots k_n \in \{0, 1, \ldots, p\}$, iar $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = kp$, rezultă că cel puţin k dintre numerele $k_1, k_2, \ldots k_n$ sunt nenule.
Dacă exact k dintre numerele $k_1, k_2, \ldots k_n$ sunt nenule, atunci acestea sunt egale cu p, iar ceilalţi termeni ai sumei $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ sunt egali cu 0. Deoarece există exact C_n^k astfel de situaţii, obţinem:

$$C_{np}^{kp} - C_n^k = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=kp \\ \exists\ i=\overline{1,n},\ 0<k_i<p}} C_p^{k_1} \cdot C_p^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_p^{k_n}. \tag{3}$$

Dacă $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = kp$ şi există $i = \overline{1, n}$, astfel încât $0 < k_i < p$, atunci nu se poate ca toţi ceilalţi termeni ai sumei să fie egali cu p, deci există $k_j \neq k_i$, astfel încât $0 < k_j < p$.

Avem $C_p^{k_i} = \dfrac{p}{k_i} \cdot C_{p-1}^{k_i - 1}$, şi cum $(k_i, p) = 1$, rezultă că $k_i \mid C_{p-1}^{k_i-1}$, deci $p \mid C_p^{k_i}$. Analog deducem că $p \mid C_p^{k_j}$, deci $p^2 \mid \left(C_{np}^{kp} - C_n^k\right)$.