

PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI EXCLUDERII

ABSTRACT. Articolul prezintă o modalitate de numărare folosind operațiile cu mulțimi și cardinalul unei mulțimi finite.

Lecția se adresează clasei a VI-a.

Data: octombrie 2013

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala gimnazială nr. 96, București

În cele ce urmează toate mulțimile cu care vom opera sunt mulțimi finite sau altfel spus mulțimi cu un număr finit de elemente. În acest context vom fi preocupați de aflarea numărului de elemente al reuniunii a două sau trei mulțimi.

Definiție Numim cardinal al unei mulțimi numărul de elemente al mulțimii.

Cardinalul unei mulțimi se notează $cardA$ sau $|A|$.

Exemplu Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$, atunci $cardA=5$, deoarece mulțimea A are 5 elemente.

Să remarcăm următorul fapt evident:

Observația 1

Dacă A și B sunt două mulțimi disjuncte ($A \cap B = \emptyset$), atunci

$$card(A \cup B) = cardA + cardB.$$

Ne interesează acum $cardA \cup B$ în cazul în care mulțimile nu sunt disjuncte ($A \cap B \neq \emptyset$)

Pentru început vom mai face câteva observații.

Observația 2

Pentru două mulțimi A și B sunt adevărate afirmațiile:

1. $A - B = A - (A \cap B)$
2. $card(A - B) = cardA - card(A \cap B)$

Faptul că afirmațiile de mai sus sunt adevărate rezultă imediat din Figura 1. Când scriem diferența dintre mulțimile A și B , din mulțimea B ne interesează numai elementele care se găsesc și în mulțimea A , adică elementele comune lui A și B .

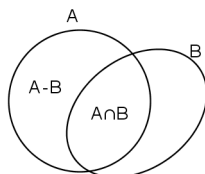


Figura 1

Figura 2

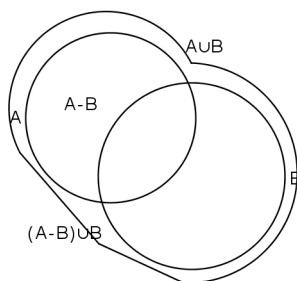


Figura 2 ne arată că reuniunea mulțimilor A și B o putem privi și ca reuniune între mulțimile $A - B$ și B . Practic înseamnă că atunci când scriem reuniunea a două mulțimi vom scrie mai întâi elementele uneia dintre mulțimi (în cazul nostru B) apoi elementele din cealaltă mulțime care nu se găsesc în mulțimea pe care deja am scris-o (în cazul nostru $A - B$). Acest lucru ne permite să formulăm

Observația 3

Dacă A și B sunt două mulțimi finite, atunci

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

Teorema 1 Dacă A și B sunt două mulțimi finite, atunci

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$$

(Principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi)

Demonstrație: Afirmția din enunțul teoremei este evidentă dacă avem în vedere că reuniunea a două mulțimi înseamnă " să scriem împreună

elementele celor două mulțimi, având grijă ca elementele comune să nu se repete." Adunând cardinalele celor două mulțimi este evident că numărul elementelor comune (din $A \cap B$) au fost adunate de două ori, deci va trebui să le scădem.

Să încercăm acum o demonstrație mai riguroasă. Din Observația 3 putem scrie:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}((A - B) \cup B) \quad (1)$$

Cum mulțimile $A - B$ și B sunt disjuncte, din Observația 1 avem:

$$\text{card}((A - B) \cup B) = \text{card}(A - B) + \text{card}B \quad (2)$$

Cu aceasta relația (1) devine:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A - B) + \text{card}B \quad (3)$$

Acum, datorită punctului 2 din Observația 2, relația (3) devine:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B) + \text{card}B$$

și teorema este demonstrată.

O teoremă asemănătoare se poate demonstra și pentru trei sau mai multe mulțimi finite. Ne vom limita la a demonstra teorema în cazul a trei mulțimi.

Înainte de aceasta să reținem:

Observația 4

Dacă A, B și C sunt trei mulțimi atunci

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Această observație poate fi ușor verificată pe un exemplu.

Teorema 2

Dacă A, B și C sunt trei mulțimi finite, atunci

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}A + \text{card}B + \text{card}C - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

(Principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi)

Demonstrație Avem succesiv: $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}((A \cup B) \cup C) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}C - \text{card}((A \cup B) \cap C) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B) + \text{card}C - \text{card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \text{card}A + \text{card}B + \text{card}C - \text{card}(A \cap B) -$

$$(card(A \cap C) + card(B \cap C) - card(A \cap C \cap B \cap C)) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C).$$

Așadar, teorema este demonstrată.

Acum să încercăm să rezolvăm două probleme folosind principiul includerii și excluderii:

Problema 1

Într-o clasă 18 elevi vorbesc limba germană, 15 elevi vorbesc limba franceză, iar 7 elevi vorbesc și limba germană și limba franceză. Câți elevi sunt în clasă?

Soluție: Vom nota cu A mulțimea elevilor care vorbesc limba germană, iar cu B mulțimea elevilor care vorbesc limba franceză. Atunci mulțimea elevilor care vorbesc ambele limbi va fi $A \cap B$, iar mulțimea elevilor din clasă este reprezentată de $A \cup B$.

Cu aceste notații, numărul elevilor din clasă este $card(A \cup B)$ și având în vedere Teorema 1 vom scrie:

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

Dar $cardA = 18$ (18 elevi vorbesc limba germană), $cardB = 15$ (15 elevi vorbesc limba franceză) și $card(A \cap B) = 7$ (7 elevi vorbesc și limba germană și limba franceză)

Cu acestea rezultă

$$card(A \cup B) = 18 + 15 - 7 = 26$$

În concluzie, în clasă sunt 26 de elevi.

Problema 2

Într-o clasă cu 24 de elevi 10 elevi joacă fotbal, 12 elevi joacă baschet, iar 8 elevi joacă volei. Se știe că 2 elevi joacă și fotbal și baschet, 3 elevi joacă și baschet și volei, iar 2 elevi joacă și fotbal și volei. Arătați că există cel puțin un elev care joacă și fotbal și baschet și volei.

Soluție: Vom nota A mulțimea elevilor care joacă fotbal, B mulțimea elevilor care joacă baschet și C mulțimea elevilor care joacă volei. Atunci mulțimea elevilor din clasă înseamnă $A \cup B \cup C$, mulțimea elevilor care joacă și fotbal și baschet va fi $A \cap B$, mulțimea elevilor care joacă și baschet și volei va fi $B \cap C$, iar mulțimea elevilor care joacă și fotbal și volei va fi $A \cap C$. În sfârșit, mulțimea elevilor care joacă și fotbal și baschet și volei va fi reprezentată de $A \cap B \cap C$.

Din Teorema 2 avem:

$$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C) \quad (1)$$

Dar $\text{card}(A \cup B \cup C) = 24$, $\text{card}A = 10$, $\text{card}B = 12$, $\text{card}C = 8$,
 $\text{card}(A \cap B) = 2$, $\text{card}(B \cap C) = 3$ și $\text{card}(A \cap C) = 2$.

Înlocuind în (1) avem:

$$24 = 10 + 12 + 8 - 2 - 3 - 2 + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

de unde rezultă

$$\text{card}(A \cap B \cap C) = 1$$

ceea ce ne arată că există un elev care joacă și fotbal și baschet și volei.