SOLUȚIE

**Enunţ:** *Fie $p$ un număr natural prim impar. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $s(n)$ ca fiind cel mai mic număr natural nenul $m$ pentru care $mn-1$ se divide cu $p$. De exemplu, în cazul $p=7$ avem $s(2)=4$ sau $s(5)=3$.*

*Considerăm funcţia $f:\{1,2,3,...,p-1\} \to \mathbb{N}^*$ definită prin $f(x)=x+s(x)$, pentru orice $x \in \{1,2,3,...,p-1\}$. Determinaţi numărul de elemente al mulţimii $\operatorname{Im} f$.*

*Soluţie.* Vom demonstra că rezultatul este $\frac{p+1}{2}$. Pentru început să remarcăm că $s(x)<p$, pentru orice $x \in \{1,2,3,...,p-1\}$. Apoi, dacă $s(a)=b$ atunci $s(b)=a$, de unde $f(x)=f(s(x))$. Pe de altă parte $x=s(x)$ conduce la $x^2-1$ divizibil cu $p$ adică $x=1$ sau $x=p-1$. Atunci $f(1)=2$ şi $f(p-1)=2p-2$. Deducem că $2<f(x)<2p-2$. pentru orice $x \in \{2,3,...,p-2\}$.

Fie $x,y$ astfel încât $f(x)=f(y)$. Atunci $x+s(x)=y+s(y)$. Demonstrăm că $x=y$ sau $x=s(y)$. Avem $(x-y)(x-s(y)) = x^2-xs(y)-xy+ys(y) = x^2-x(y+s(y))+ys(y)$ $= x^2-x(x+s(x))+ys(y) = ys(y)-xs(x) = (ys(y)-1)-(xs(x)-1)$ care este divizibil cu $p$. Atunci $p$ divide $x-y$ sau $x-s(y)$ ceea conduce la $x=y$ sau $x=s(y)$.

În aceste condiţii Printre numerele $f(2), f(3), ..., f(p-2)$ sunt exact $\frac{p-3}{2}$ numere diferite. Numărul total de elemte din $\operatorname{Im} f$ este $\frac{p-3}{2}+1+1=\frac{p+1}{2}$. □