Etapa 1, Problema 4

Fie S un punct pe diametrul BC al unui semicerc. Perpendiculara în S pe BC intersectează semicercul în A, iar cercurile înscrise în triunghiurile curbilinii ABS şi ACS sunt tangente la BC în M, respectiv N. Demonstraţi că măsura unghiului $\sphericalangle MAN$ nu depinde de poziţia punctului S pe BC.

Cătălin Calistru, Gazeta Matematică 3/2010

Soluţie (**Beatrice Cicortaş**, Oradea).

Notăm cu P, respectiv Q, punctele de contact dintre cercul înscris în triunghiul curbiliniu ABS (de centru I şi rază r) şi semicercul iniţial (de centru O şi rază R), respectiv AS. Evident, punctele O, I şi P sunt coliniare (atât IP, cât şi OP, sunt perpendiculare pe tangenta comună a celor două cercuri în punctul P), $IQ \| BC$, iar $\frac{PI}{PO} = \frac{r}{R} = \frac{IQ}{OC}$; rezultă de aici că şi punctele P, Q, C sunt coliniare. Din puterea punctului P faţă de cercul de centru I, obţinem că $CM^2 = CQ \cdot CP$.

Observăm că $\sphericalangle APC \equiv \sphericalangle ABC \left(= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\right)$, $\sphericalangle SAC \equiv \sphericalangle ABC \,(= 90^\circ - \sphericalangle C)$, prin urmare $\sphericalangle APC \equiv \sphericalangle SAC$. Deducem că $\triangle ACP \sim \triangle QCA\,(U.U.)$, de unde $AC^2 = CQ \cdot CP$. Astfel, $CM^2 = AC^2$, adică triunghiul AMC este isoscel, cu $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle AMC$. Analog se arată că $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle ANB$. Avem:

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAN - \sphericalangle BAM = \sphericalangle BAN - (90^\circ - \sphericalangle MAC) =$$

$$= \sphericalangle BNA - (90^\circ - \sphericalangle CMA) = (180^\circ - \sphericalangle MAN) - 90^\circ = 90^\circ - \sphericalangle MAN,$$

aşadar $2 \sphericalangle MAN = 90^\circ$, deci $\sphericalangle MAN = 45^\circ$, prin urmare măsura unghiului $\sphericalangle MAN$ nu depinde de poziţia punctului S pe BC.

Soluţie alternativă (**Ştefana Şerban**, Reghin şi **Oana Ciocioman**, Timişoara).

Transformăm configuraţia printr-o inversiune de pol A şi putere $k = AS$. Punctul S este invariant.

Dreapta $d = BC$, care este perpendiculară pe AS şi nu conţine polul inversiunii, se va transforma în cercul d' de diametru AS.

Cercul ω care trece prin punctele A, B şi C, deci conţine polul inversiunii, se va trasforma în diametrul ω' al cercului d'.

Cercurile ω_1 şi ω_2 înscrise în triunghiurile curbilinii ABS şi ACS se vor transforma în cercurile ω_1', respectiv ω_2', tangente la $B'C'$, AS şi, respectiv, la arcele $\overset{\frown}{B'S}$ şi $\overset{\frown}{C'S}$, unde B' şi C' sunt punctele de intersecţie dintre d' şi ω'.

Transformatele M' şi N' ale punctelor M şi N vor fi mijloacele arcelor $\overset{\frown}{B'S}$, respectiv $\overset{\frown}{C'S}$ din cercul d'. În aceste condiţii,

$$\sphericalangle M'AN' = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{M'N'} = \frac{1}{4} \cdot \overset{\frown}{B'C'} = \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ.$$

Cum inversiunea este transformare conformă (păstrează unghiurile), rezultă că măsura unghiului $\sphericalangle MAN$ este de 45°, deci nu depinde de poziţia punctului S pe BC.

Soluţie alternativă (**Radu Miron**, Iaşi şi **Ciprian Ştirbu**, Bacău).

Păstrăm notaţiile de la prima soluţie; fie încă $x = CS$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ şi vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x < \frac{a}{2}$. Avem: $OI = R - r = \frac{a}{2} - r$, $OM = SM - SO = r - (\frac{a}{2} - x) = r + x - \frac{a}{2}$.

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul OMI obţinem că $OM^2 + IM^2 = OI^2$. După calcule, găsim că r este soluţie a ecuaţiei

$$r + 2x \cdot r + (x^2 - ax) = 0,$$

cu singura soluţie pozitivă $r = \sqrt{ax} - x$.

Din teorema catetei aplicată în truinghiul ABC rezultă că $\sqrt{ax} = b$, aşadar $r = b - x$. Astfel, $SM = b - x$, $MB = BC - CS - SM = a - b$, prin urmare

$$\frac{SM}{MB} = \frac{b-x}{a-b} = \frac{b - \frac{b^2}{a}}{a-b} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{bc}{a}}{c} = \frac{AS}{AB}.$$

Reciproca teoremei bisectoarei în triunghiul ABS arată că AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle SAB$. Analog se arată că AN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle SAC$, deci

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAS + \sphericalangle NAS = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAS + \sphericalangle CAS) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$$

adică măsura unghiului $\sphericalangle MAN$ nu depinde de poziţia punctului S pe BC.

Comentarii.

Folosind oarecum aceeaşi idee, rezolvă problema **Marius Bocanu**, Bucureşti.

În rest, soluţiile primite sunt calculatorii, concurenţii nesesizând proprietăţile geometrice ale configuraţiei; în majoritatea cazurilor, desfăşurarea de forţe este colosală! Rezolvări în care calculele sunt ceva mai bine “aranjate” au dat **Vladimir Cucu**, Chişinău**, Marta Ungureanu**, Craiova, **Octavian Roşu**, Ploieşti, **Andi Brojbeanu**, Târgovişte şi **Alexandru Maican**, Bucureşti (care a mai schiţat şi o a doua soluţie, folosind inversiunea).