Problema 4. a) Demonstraţi că un cub poate fi împărţit în n cuburi pentru orice $n \geq 58$.

b) Fiind dat un cub, arătaţi că el nu poate fi umplut cu n cuburi oricare două neegale ($n \geq 2$).

***

Soluţie. a) Orice cub poate fi împărţit în 8 cuburi egale, ducând prin mijloacele muchiilor sale plane paralele cu feţele cubului. În mod analog, dacă împărţim muchiile cubului în câte trei segmente egale şi ducem prin aceste puncte plane paralele cu feţele cubului, vom partiţiona cubul în 27 de cuburi egale. Similar obţinem partiţionarea cubului în 64 de cuburi egale.

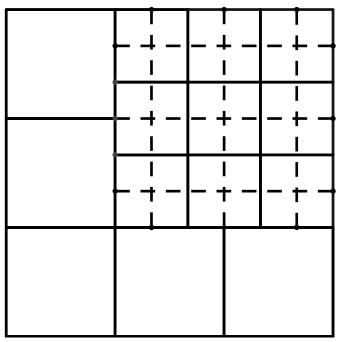
Dacă avem un cub împărţit în n cuburi, atunci alegem unul dintre cuburile mici şi îl împărţim în 8 cuburi. Atunci cubul iniţial va fi partiţionat în $n-1+8 = n+7$ cuburi. Altfel spus, dacă are loc împărţirea pentru n, atunci are loc şi pentru $n+7$. Va fi suficient să arătăm pentru $n \in \{58, 59, \ldots, 64\}$.

Pentru $n = 58$ împărţim întâi cubul în 27 de cuburi egale, apoi 8 dintre ele le unim într-un singur cub. Dintre cuburile mici rămase, alegem două şi le împărţim în câte 27 de cuburi fiecare, apoi în fiecare din ele unim câte 8 cuburi. Vom avea deci: $(27-7)+2\cdot 26-2\cdot 7 = 58$ de cuburi în partiţie.

Pentru $n = 59$ împărţim întâi cubul în 64 de cuburi egale, apoi 27 dintre ele le unim într-un singur cub, iar din cele rămase trei le împărţim în câte 8 cuburi egale. Obţinem o partiţie cu $64-26+3\cdot 7 = 59$ de cuburi.

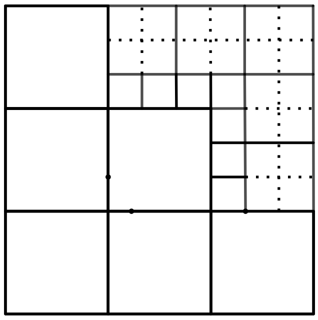
Pentru $n = 60$ împărţim cubul în 27 de cuburi egale. Două dintre acestea le partiţionăm în 8 şi respectiv în 27 de cuburi egale. Obţinem o partiţie cu $27+26+7 = 60$ de cuburi.

Pentru $n = 61$ împărţim cubul în 27 de cuburi egale şi continuăm astfel: Patru dintre cuburile care generează un pătrat pe una dintre feţele cubului iniţial le împărţim în câte 27 de cuburi egale fiecare. Obţinem trei "felii" a câte $9\cdot 4 = 36$ de cuburi fiecare. Cuburile care formează două dintre aceste felii le unim câte 8 şi obţinem $2\cdot 36 : 8 = 9$ cuburi (vezi figura). Din celelalte $27-4 = 23$ de cuburi de la împărţirea iniţială mai putem uni 8 cuburi pentru a forma un singur cub şi obţinem în final o partiţie cu $27+4\cdot 26-10\cdot 7 = 61$ de cuburi.



Pentru $n = 62$ împărţim cubul în 27 de cuburi egale şi cinci dintre aceste cuburi le împărţim în câte 8 cuburi egale. Obţinem astfel o partiţie cu $27+5\cdot 7 = 62$ de cuburi.

Pentru $n = 63$ realizăm o împărţire similară cazului $n = 61$ (vezi figura alăturată), şi anume: $63 = 27 + 3 \cdot 26 - 6 \cdot 7$.
Pentru $n = 64$ putem împărţi cubul în 64 de cuburi egale ($64 = 4^3$).
În acest moment, inducţia matematică cu pasul 7 (adică $P(n) \Rightarrow P(n+7)$) încheie demonstraţia.



b) Presupunem că poate fi făcută o astfel de umplere. Alegem cel mai mic cub, notat $\mathcal{C}_0$, dintre cele care apar pe feţe. Observăm că el apare pe o singură faţă $\mathcal{F}_0$ a cubului iniţial. În continuare, alegem cel mai mic cub, notat $\mathcal{C}_1$, care se sprijină pe faţa $\mathcal{F}_1$ a lui $\mathcal{C}_0$, opusă feţei $\mathcal{F}_0$. Datorită alegerii lui $\mathcal{C}_0$, el este "înconjurat" de cuburi mai mari, prin urmare $\mathcal{C}_1$ are o faţă strict inclusă în $\mathcal{F}_1$, adică $\mathcal{C}_1$ este mai mic decât $\mathcal{C}_0$.

Făcând consideraţii analoage, vom ajunge în cele din urmă pe o altă faţă a cubului mare, cu un cub $\mathcal{C}_n$ strict mai mic decât $\mathcal{C}_0$. Contradicţie.