Problema 4.

Pentru orice mulțimi nevide de numere A și B, notăm

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

a) Determinaţi cel mai mare număr natural p având proprietatea că există $A,B\subset\mathbb{N}$ astfel încât card $A=$ card $B=p$ și $A+B=\{0,1,2,...,2021\}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n având proprietatea că există $A,B\subset\mathbb{N}$ astfel încât card $A=$ card $B=n$ și $A+B=\{0,1,2,...,2021\}$.

***

Soluţie:

a) Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}$ şi $B=\{b_1,b_2,...,b_p\}$, unde $a_1<a_2<...<a_p$ şi $b_1<b_2<...<b_p$.

Numerele $a_1+b_1<a_2+b_1<...<a_p+b_1<a_p+b_2<a_p+b_3<...<a_p+b_p$ sunt elemente ale mulţimii $A+B$, deci $2p-1\leq 2022$, adică $p\leq 1011$.

Considerând mulţimile $A=\{0,1,2,...,1010\}$ şi $B=\{0,2,3,...,1011\}$, rezultă că $p=1011$.

b) Întrucât numărul de perechi $(a,b)\in A\times B$ este n^2, rezultă că mulţimea $A+B$ conţine cel mult n^2 elemente. Deoarece card $(A+B)=2022$, avem $n^2\geq 2022$, deci $n\geq 45$.

Considerând mulţimile

$$A=\{0,1,2,...,44\}\ \text{şi}\ B=\{0,1\cdot 45,2\cdot 45,...,43\cdot 45,1977\},$$

rezultă că $n=45$.