Problema 4. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D, diferit de A, B, C, pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ circumscris triunghiului. Fie $P \in [OD]$.

a) Dacă $a, d \in \mathbb{C}$, cu $d \neq 0$, demonstraţi că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t \cdot d - a|$ este convexă.

b) Demonstraţi că $PA + PB + PC \leqslant 4R$.

* * *

Soluţie. a) Fie $\alpha, t_1, t_2 \in [0,1]$.

$$f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = |(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)\, d - a| = |\alpha\,(t_1 d - a) + (1-\alpha)\,(t_2 d - a)| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha |t_1 d - a| + (1-\alpha)|t_2 d - a| = \alpha f(t_1) + (1-\alpha) f(t_2),$$

aşadar f este convexă.

b) Datorită simetriei, putem considera că D se află pe arcul mic AC. Demonstrăm mai întâi că în acest caz, avem $AD + CD = BD$. (1).

Fie punctul E, astfel încât $\triangle\ BDE$ este echilateral, şi $[AE] \cap [BC] \neq \emptyset$. Atunci $\triangle\ ABD \equiv \triangle\ CBE$ (L.U.L.), deci $AD = CE$ şi $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BAD$. Rezultă că $\sphericalangle BCE + \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$, deci $C \in (DE)$.

Obţinem $BD = DE = CD + CE = CD + AD$.

Revenim la soluţia problemei:

Fie $a, b, c, d, p \in \mathbb{C}$ afixele punctelor A, B, C, D, respectiv P, într-un reper cartezian cu originea în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Deoarece $P \in [OD]$, există $t \in [0,1]$, astfel încât $p = t \cdot d$. Obţinem:

$$PA + PB + PC = |p - a| + |p - b| + |p - c| = |t \cdot d - a| + |t \cdot d - b| + |t \cdot d - c|.$$

Funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t \cdot d - a| + |t \cdot d - b| + |t \cdot d - c|$ este o sumă de funcţii convexe, deci este convexă, aşadar îşi atinge maximul într-unul dintre capetele intervalului $[0,1]$. Avem $g(0) = |a| + |b| + |c| = 3R$, (2)
iar $g(1) = |d - a| + |d - b| + |d - c| = AD + BD + CD$.

Din (1) rezultă că $g(1) = 2BD \leqslant 4R$. Folosind (2), deducem că maximul funcţiei g este egal cu $4R$ şi se atinge când $t = 1$.

Aşadar $PA + PB + PC = g(t) \leqslant 4R$.